Banque <<Agro>>
Technologie et Biologie
A et **AE - 0603 T**

MATHÉMATIQUES 2
Durée : 3 heures

L'usage de la calculatrice, d'abaques et de tables est autorisé pour cette épreuve.

Les parties A, B et C sont indépendantes les unes des autres sous réserve d'admettre les résultats de la partie A.
Les représentations graphiques sont à réaliser sur la copie.

PARTIE A.

A.1.a. Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer l'équivalence : A est inversible si et seulement si ad-bc est distinct de zéro.

A.1.b. Soit λ un réel ; on dit que λ est une valeur propre de A si la matrice $\begin{pmatrix} a-\lambda & c \\ b & d-\lambda \end{pmatrix}$ est NON-inversible. Montrer en utilisant A.1.a. que λ est valeur propre de A si et seulement si λ est solution de l'équation du second degré :

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = 0.$$

En déduire que la matrice A possède au moins une valeur propre réelle si et seulement si $(a-d)^2 + 4bc \geq 0$ puis que A possède exactement une valeur propre si et seulement si $(a-d)^2 + 4bc = 0$.

A.1.c. Montrer l'équivalence : 0 est valeur propre si et seulement si A est NON-inversible.

A.2.a. Soient $p \in]0,1[$ et $q = 1-p$ deux réels ; on considère la suite de terme général $u_n = pq^n$. Montrer que la série $\sum u_n$ est convergente et calculer la somme : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

A.2.b. Montrer que pour tout q $\in [0,1[$, $\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$ et que

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)q^{k-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$$

T.S.V.P.

A.2.c. Déduire de ce qui précède que l'on définit la distribution d'une variable aléatoire X, en posant : $\forall n \in \mathbb{N}, P[X = n] = pq^n$. Calculer son espérance E(X), puis E(X(X-1)) et enfin V(X), sa variance.

On notera par la suite $\mathcal{G}$(p) la loi ainsi définie, dite de Pascal.

A.2.d. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes et de même loi $\mathcal{G}$(p), définie ci-dessus. Déterminer les espérances, $E(S)$ et $E(Z)$, les variances $V(S)$ et $V(Z)$, ainsi que les lois des variables aléatoires : $S = X + Y$ et $Z = X - Y$.

PARTIE B.

Soient x et y deux réels ; on note A(x,y) la matrice :

$$A(x,y) = \begin{pmatrix} (\frac{\sqrt{3}}{2} + 1)(x+1) & y \\ -y & (\frac{\sqrt{3}}{2} - 1)(x+1) \end{pmatrix}$$

B.1.a. Montrer que la matrice $A(x,y)$ est NON-inversible si et seulement si

$$(2y + x + 1)(2y - x - 1) = 0.$$

B.1.b. Montrer que la matrice $A(x,y)$ admet au moins une valeur propre réelle si et seulement si

$$(y + x + 1)(x - y + 1) \geq 0.$$

B.1.c. Dans un plan rapporté à un repère orthonormé, représenter graphiquement sur deux figures séparées les ensembles de points satisfaisant aux relations des questions B.1.a. et B.1.b.

Dans la suite du problème X et Y sont deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$. On note $A_{X,Y}$ la variable aléatoire définie sur Ω et à valeurs dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par

$$\forall \omega \in \Omega, A_{X,Y}(\omega) = A(X(\omega), Y(\omega)).$$

B.2. Dans cette question on suppose que X et Y sont des variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$.

B.2.a. Montrer l'égalité des trois évènements :
"$A_{X,Y}$ est NON-inversible" , $[2Y - X - 1 = 0]$ et $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [X = 2n + 1 \text{ et } Y = n + 1]$

B.2.b. Montrer de même l'égalité des trois évènements :
"$A_{X,Y}$ admet une seule valeur propre." , $[X - Y + 1 = 0]$ et $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [X = n \text{ et } Y = n + 1]$.

B.2.c. Montrer enfin l'égalité des trois évènements :
$''A_{X,Y}$ admet deux valeurs propres réelles distinctes.'' , $[X - Y + 1 > 0]$ et
$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [X = n \text{ et } Y \leq n]$.

B.2.d. On suppose dans cette question que les variables aléatoires X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans l'ensemble d'entiers $\{1, \ldots, 2003\}$ et de même loi, définie par

$$\forall k \in \mathbb{N},\ 1 \leq k \leq 2003, P[X = k] = P[Y = k] = \frac{1}{2003}.$$

Déterminer la probabilité de l'évènement : $''A_{X,Y}$ est NON inversible $''$, la probabilité de l'évènement : $''A_{X,Y}$ possède une seule valeur propre $''$, et enfin la probabilité de l'évènement : $''A_{X,Y}$ possède deux valeurs propres réelles distinctes$''$.

B.2.e. Reprendre la question précédente lorsque X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, de même loi $\mathcal{G}(p)$, définie au A.2.c.

PARTIE C.

Dans cette partie les variables X et Y sont des variables à densité.

C.1. Dans cette question X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, de même loi uniforme sur l'intervalle $]0, 2[$.
Que peut-on dire de la probabilité de l'évènement : $''A_{X,Y}$ est NON-inversible$''$?
Représenter graphiquement dans un repère orthonormé l'évènement $\mathcal{A}$: $''A_{X,Y}$ admet deux valeurs propres réelles $''$.
Déterminer la probabilité de cet évènement.

C.2. Reprendre la question précédente lorsque X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, de même loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$.

FIN.